Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln.

Von

Heinrich Maschke in Berlin.*)

Die in der Ueberschrift bezeichnete Gruppe ist zunächst gänzlich ausser Zusammenhang mit der Theorie der hyperelliptischen Functionen von Herrn Klein**) aus der Liniengeometrie abgeleitet worden. Später***) hat Herr Klein gezeigt, dass die sogenannten Borchardt'schen Moduln der hyperelliptischen Functionen vom Geschlechte $p = 2$ sich nach derselben Gruppe linear substituiren, wodurch dann die Gruppe, welche bisher nur den Vorzug hatte, eine der wenigen Gruppen linearer Substitutionen von *endlicher* Ordnungszahl zu sein — und zwar, von einfachsten Fällen abgesehen, die erste, welche man im quaternären Gebiet kennen lernte — wesentlich an Interesse gewann. Dieses Interesse wird für viele Mathematiker im Vordergrund stehen, wenn es sich, wie es auf Anregung von Herrn Professor Klein im folgenden geschehen soll, darum handelt, *das volle System invarianter Formen* für diese Gruppe aufzustellen.

§ 1.

Definition der Gruppe.

Die Ausdrücke:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = p_{12} + p_{34}, & x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34}), \\ x_3 = p_{13} + p_{42}, & x_4 = \frac{1}{i}(p_{13} - p_{42}), \\ x_5 = p_{14} + p_{23}, & x_6 = \frac{1}{i}(p_{14} - p_{23}), \end{cases}$$

wo die sechs Grössen p_{ik} in üblicher Bezeichnung die Coordinaten der

---

*) Vergl. eine vorläufige Mittheilung in den Nachrichten d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen 1887. Nr. 14.

**) Math. Ann. Bd. II, pag. 198 u. 366; Bd. IV, pag. 356 ff.

***) Vorlesung über hyperell. Functionen; gehalten in Leipzig Sommer 1885.

geraden Linie im Raume bedeuten, stellen, gleich Null gesetzt, sechs lineare Complexe, die *Fundamentalcomplexe*, dar. In Folge der, zwischen den p_{ik} bestehenden Identität sind dabei die x_i an die Gleichung gebunden:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 0.$$

Der Inbegriff dieser sechs Complexe wird durch beliebige Vertauschung und beliebigen Vorzeichenwechsel der Grössen x_i nicht geändert.*) Durch eine jede dieser beiden „Elementaroperationen" wird aber der Raum in bestimmter Weise einer linearen Transformation unterworfen, welche folgendermassen näher präcisirt wird:

Jede aus einer geraden Anzahl jener Elementaroperationen zusammengesetzte Umänderung der x_i bewirkt eine Collineation, jede aus einer ungeraden Anzahl zusammengesetzte eine dualistische Umformung des Raumes.

Leiten wir so aus den 720 Permutationen und den 64 Zeichenwechseln der x_i alle möglichen Collineationen ab, so entsteht eine wohldefinirte *endliche* Collineationsgruppe. Indem wir diese Collineationen homogen in den Punktcoordinaten z_1, z_2, z_3, z_4 mit der Substitutionsdeterminante $+1$ schreiben, bekommen wir *eine endliche quaternäre Gruppe linearer Substitutionen*, die wir mit G bezeichnen wollen, und diese ist es, welche der folgenden Untersuchung zu Grunde gelegt werden soll.

Wir stellen zunächst die Ordnung dieser Gruppe fest. Von den $64 . 720$ Umänderungen der x_i liefert dem oben ausgesprochenen Satze zu Folge nur die Hälfte Collineationen des Raumes. Da die Liniencoordinaten:

$$p_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i$$

aber quadratisch aus den Punktcoordinaten zusammengesetzt sind, so entsprechen *einer* Umänderung der x_i immer *zwei* Substitutionen der z_i, die sich von einander nur durch simultanen Vorzeichenwechsel unterscheiden, und auch nicht mehr als zwei; *mithin ist die Anzahl der Substitutionen unserer Gruppe, also die Ordnung von G:*

$$N = 64 . 720.$$

In der mit G demnach hemiëdrisch isomorphen Gruppe der x_i bilden die aus einer geraden Anzahl von Vertauschungen, verbunden mit einer geraden Anzahl von Vorzeichenwechseln zusammengesetzten Operationen eine ausgezeichnete Untergruppe, und in dieser ist wieder die aus den Operationen, welche eine gerade Anzahl von Vorzeichen-

---

*) Vergl. betreffs dieser Gruppe Reichhardt, Math. Ann. Bd. 28 Ueber die Normirung der Borchardt'schen Moduln.

wechseln allein enthalten, bestehende Untergruppe von der Ordnung 32 ausgezeichnet. *In Folge des Isomorphismus schliessen wir daher für G auf die Existenz einer ausgezeichneten Untergruppe H_1 von der Ordnung $\frac{1}{2}N$, und eine in dieser ausgezeichneten Untergruppe H_2 von der Ordnung 64.*

Um zu bestimmten Formeln überzugehen, legen wir das Fundamentaltetraeder (12), (34), (56) als Coordinatentetraeder zu Grunde*), und schreiben nun zunächst die 64 Substitutionen von H_2 auf. Von diesen lauten acht folgendermassen:

$$(2\mathrm{a})\qquad \left\{\begin{array}{l|l|l|l} z_1' = \pm z_1 & z_1' = \pm z_1 & z_1' = \pm z_1 & z_1' = \pm z_1 \\ z_2' = \pm z_2 & z_2' = \pm z_2 & z_2' = \mp z_2 & z_2' = \mp z_2 \\ z_3' = \pm z_3 & z_3' = \mp z_3 & z_3' = \pm z_3 & z_3' = \mp z_3 \\ z_4' = \pm z_4 & z_4' = \mp z_4 & z_4' = \mp z_4 & z_4' = \pm z_4 . \end{array}\right.$$

Zu diesen acht Formeln — es sind immer gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen zu nehmen — treten acht andere, in denen auf der rechten Seite zu jedem z der Factor $i = \sqrt{-1}$ hinzukommt. Die noch fehlenden 48 erhält man, wenn man immer je 16 ebenso aus den drei Formeln:

$$(2\mathrm{b})\qquad \left\{\begin{array}{l|l|l} z_1' = z_2 & z_1' = z_3 & z_1' = z_4 \\ z_2' = z_1 & z_2' = z_4 & z_2' = z_3 \\ z_3' = z_4 & z_3' = z_1 & z_3' = z_2 \\ z_4' = z_3 & z_4' = z_2 & z_4' = z_1 \end{array}\right.$$

bildet, wie die Formeln (2a) aus der Identität.

Was weiter die ausgezeichnete Untergruppe H_1 anbetrifft, so erhalten wir deren Substitutionen, indem wir mit der eben hingeschriebenen H_2 noch combiniren die Untergruppe G_1 von der Ordnung 720, welche einer geraden Anzahl von Vertauschungen der x_i entspricht. *Die aus den Permutationen, welche eine gerade Anzahl von Vertauschungen von 6 Elementen enthalten, bestehende Gruppe lässt sich vollständig durch folgende beiden cyklischen Permutationen von der Periode 3 und 5 erzeugen:*

$$S' = (x_1 x_2 x_3), \quad T' = (x_2 x_3 x_4 x_5 x_6).$$

Transformiren wir nämlich S' der Reihe nach mit T', T'^2, T'^3, T'^4, so erhalten wir: $(x_1 x_3 x_4)$, $(x_1 x_4 x_5)$, $(x_1 x_5 x_6)$, $(x_1 x_6 x_2)$, woraus sich in Verbindung mit S' durch einfache Transformirungen folgende cyklischen Permutationen ergeben:

$$(x_1 x_2 x_3),\ (x_1 x_2 x_4),\ (x_1 x_2 x_5),\ (x_1 x_2 x_6).$$

Hieraus aber lässt sich, wie bekannt, die Gruppe der Permutationen

*) Siehe hierüber auch Rohn: Ueber die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche. Math. Ann. Bd. XVIII, pag. 143, 144 ff.

der x_i, welche aus einer geraden Anzahl von Vertauschungen bestehen, zusammensetzen.*)

Die beiden Permutationen S' und T' liefern für die Punktcoordinaten z folgende beiden Formeln:

$$(3) \quad \begin{cases} S: \begin{cases} \pm 2z_1' = (1-i)(z_1-z_4), \\ \pm 2z_2' = (1-i)(z_2-z_3), \\ \pm 2z_3' = (1+i)(z_2+z_3), \\ \pm 2z_4' = (1+i)(z_1+z_4), \end{cases} \\ T: \begin{cases} \pm 2z_1' = -z_1+z_2+iz_3-iz_4, \\ \pm 2z_2' = +z_1+z_2+iz_3+iz_4, \\ \pm 2z_3' = -z_1+z_2-iz_3+iz_4, \\ \pm 2z_4' = +z_1+z_2-iz_3-iz_4. \end{cases} \end{cases}$$

S und T sind demnach für die Gruppe G_1 erzeugende Substitutionen. Aus ihnen und den 64 Substitutionen von H_2 setzt sich mithin durch alle Combinationen und Wiederholungen die Gruppe H_1 zusammen.

Zur vollen Gruppe G fehlen jetzt nur noch die Substitutionen, welche einer *ungeraden* Anzahl von Zeichenwechseln verbunden mit einer *ungeraden* Anzahl von Vertauschungen der x_i entsprechen. Für die Gruppe der x_i bekommen wir diese, wie sich ohne Weiteres beweisen lässt, sämmtlich, wenn wir zu den bereits vorhandenen Vertauschungen und Zeichenwechseln nur noch die eine Substitution in allen Combinationen hinzunehmen:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2, \\ x_2' &= x_1. \end{aligned}$$

Die entsprechende Substitution der z aber lautet folgendermassen:

$$(4) \quad U: \begin{cases} \pm\sqrt{2}\,z_1' = (1+i)z_1, \\ \pm\sqrt{2}\,z_2' = (1+i)z_2, \\ \pm\sqrt{2}\,z_3' = (1-i)z_3, \\ \pm\sqrt{2}\,z_4' = (1-i)z_4. \end{cases}$$

Wir haben jetzt in den 64 Substitutionen von H_2 verbunden mit S, T, U in allen Combinationen und Wiederholungen die ganze Gruppe G von 64 . 720 Substitutionen vor uns.

Für die Folge erweist es sich als vielfach bequemer, neben diesen Formeln die folgenden vier Substitutionen von der Determinante $+1$ zu benutzen, *welche ebenfalls die ganze Gruppe G erzeugen*, wie im letzten Paragraphen näher auseinandergesetzt werden soll:

*) Netto. Substitutionstheorie. Leipzig 1882, pag. 35, Lehrsatz IX.

$$
(5)\quad \begin{cases}
A: \begin{cases} z_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1+z_4), \\ z_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_2+z_3), \\ z_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_2-z_3), \\ z_4' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1-z_4), \end{cases} \qquad
B: \begin{cases} z_1' = \varepsilon z_1, \\ z_2' = \varepsilon z_2, \\ z_3' = -i\varepsilon z_3, \\ z_4' = -i\varepsilon z_4, \end{cases} \\[2ex]
C: \begin{cases} z_1' = \varepsilon z_1, \\ z_2' = \varepsilon z_4, \\ z_3' = \varepsilon z_3, \\ z_4' = \varepsilon z_2, \end{cases} \qquad
D: \begin{cases} z_1' = \varepsilon z_1, \\ z_2' = \varepsilon z_2, \\ z_3' = -\varepsilon z_3, \\ z_4' = \varepsilon z_4. \end{cases}
\end{cases}
$$

Hierin bedeutet ε eine achte Einheitswurzel, und zwar:

$$\varepsilon = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Das Vorzeichen der $\sqrt{2}$ in A kann dabei nach Belieben positiv oder negativ genommen werden, da man vermittelst der Substitution D^4, welche wegen $\varepsilon^4 = -1$ einen simultanen Zeichenwechsel aller z bewirkt, den einen Fall auf den anderen reduciren kann.

Wie man ferner sofort sieht, hat A die Periode 2, während B, C, D die Periode 8 besitzen.

Selbstverständlich kann jede der Substitutionen S, T, U sowie die zur Gruppe H_2 gehörigen angegebenen 64 durch A, B, C, D ausgedrückt werden und umgekehrt. So ist z. B.:

$$U = B\,.\,D^6, \quad S = B^7\,.\,A\,.\,B^6 \text{ etc.}$$

Die ausgezeichnete Untergruppe H_1 wird gebildet von all denjenigen Substitutionen, an denen eine gerade Anzahl der 4 Erzeugenden A, B, C, D betheiligt ist, wie man aus den folgenden Formeln entnimmt, welche die den genannten 4 Erzeugenden entsprechenden Operationen der Gruppe der x_i geben:

$$
(6)\begin{cases}
A: \begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_2, \\ x_3' = x_1, \\ x_4' = -x_4, \\ x_5' = -x_5, \\ x_6' = -x_6, \end{cases}
B: \begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1, \\ x_3' = -x_3, \\ x_4' = -x_4, \\ x_5' = -x_5, \\ x_6' = -x_6, \end{cases}
C: \begin{cases} x_1' = x_6, \\ x_2' = -x_5, \\ x_3' = x_4, \\ x_4' = -x_3, \\ x_5' = x_2, \\ x_6' = -x_1, \end{cases}
D: \begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1, \\ x_3' = -x_4, \\ x_4' = x_3, \\ x_5' = x_6, \\ x_6' = -x_5. \end{cases}
\end{cases}
$$

§ 2.

Eigenschaften der bei G invariant bleibenden Formen.*)

Ueber die Beschaffenheit derjenigen ganzen homogenen Functionen der vier Veränderlichen z_1, z_2, z_3, z_4, welche durch die N linearen Substitutionen der Gruppe G in sich selbst übergehen, kann man von vornherein eine Reihe von Sätzen aufstellen, welche uns späterhin von Nutzen sein werden.

Sei f eine solche Form vom n^{ten} Grade, so wird wegen der Homogeneität bei der Anwendung der Substitution D sich der Factor ε^n absondern, und wenn wir nach geraden und ungeraden Potenzen der Variabelen z_3 ordnen, so kommt:

$$f = f_1(z_1, z_2, z_3^2, z_4) + z_3 f_2(z_1, z_2, z_3^2, z_4),$$
$$f' = \varepsilon^n [f_1(z_1, z_2, z_3^2, z_4) - z_3 f_2(z_1, z_2, z_3^2, z_4)],$$

wo f' den durch D aus f hervorgehenden Ausdruck bedeutet. Indem wir vorläufig auch solche Formen in Betracht ziehen, welche sich bei den Substitutionen der Gruppe bis auf einen Factor reproduciren, zieht die Bedingung: $f' = \varrho \cdot f$ nach sich entweder:

$$\varrho = \quad \varepsilon^n \quad \text{und} \quad f = f_1(z_1, z_2, z_3^2, z_4),$$

oder:

$$\varrho = -\varepsilon^n \quad \text{und} \quad f = z_3 \cdot f_2(z_1, z_2, z_3^2, z_4).$$

Nun sind aber in G Substitutionen vorhanden, welche jede beliebige Vertauschung der z bewirken. So vertauscht C, indem wir den Factor ε ausser Betracht lassen, z_2 mit z_4, ADA z_2 mit z_3, ADB^2A endlich z_1 mit z_4. Aus den genannten drei Vertauschungen aber lässt sich die ganze Vertauschungsgruppe von z_1, z_2, z_3, z_4 zusammensetzen. Mithin hat jede bis auf einen Factor invariante Form entweder die Gestalt $f(z_1^2, z_2^2, z_3^2, z_4^2)$ oder $z_1 z_2 z_3 z_4 \cdot f(z_1^2, z_2^2, z_3^2, z_4^2)$. Das Vortreten des Factors $z_1 z_2 z_3 z_4$ der zweiten Form zieht nun aber sofort nach sich, dass auch alle die Ausdrücke als Factoren vorantreten müssen, welche aus $z_1 z_2 z_3 z_4$ durch die Substitutionen der Gruppe hervorgehen. Es sind dies im Ganzen 15, *welche, einzeln gleich Null gesetzt, die 15 Fundamentaltetraeder der sechs Complexe $x_i = 0$ darstellen.* Führen wir die Abkürzungen ein:

$$(7) \qquad \begin{cases} z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4 = \varphi\,, \\ z_1^2 z_2^2 + z_3^2 z_4^2 = \psi_2, \\ z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_4^2 = \psi_3, \\ z_1^2 z_4^2 + z_2^2 z_3^2 = \psi_4, \\ z_1 z_2 z_3 z_4 = \chi, \end{cases}$$

*) Betreffs der Terminologie vergl. Klein. Vorlesungen über das Ikosaeder Leipzig 1884, pag. 47 u. f.

so haben wir folgende Gleichungen für die 15 Fundamentaltetraeder:

$$(6)\qquad \begin{cases} 1 \text{ von der Form: } \chi = 0, \\ 6 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad : \psi_i \pm \psi_k = 0, \\ 2 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad : \varphi - 2(\psi_2 + \psi_3 + \psi_4) \pm 8\chi = 0, \\ 6 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad : \varphi - 2(\psi_i + \psi_k - \psi_l) \pm 8\chi = 0, \end{cases}$$

wenn wir für i, k, l alle von einander verschiedenen Werthe 2, 3, 4 nehmen. Das Product der linken Seiten dieser 15 Gleichungen liefert uns demnach eine Form 60ten Grades: R_{60}, welche bei den N Substitutionen von G zunächst bis auf einen Factor ungeändert bleibt. Aber dieser Factor ist $+1$, wie man sich leicht überzeugt, wenn man die Substitutionen A, B, C, D der Reihe nach anwendet, *mithin haben wir in R_{60} bereits eine invariante Form unserer Gruppe vor uns.*

Wir können jetzt auf Grund der vorhergehenden Erörterungen den Satz aussprechen:

1) *Jede invariante Form unserer Gruppe enthält entweder nur gerade Potenzen der Variabelen (Formen erster Art), oder ist das Product der invarianten Form R_{60} und einer Form erster Art (Formen zweiter Art).*

Soll aber eine Form erster Art vom n^{ten} Grade absolut invariant sein, so muss der nach Anwendung der Substitution D vortretende Factor $\varepsilon^n = +1$ sein, also folgt:

2) *Der Grad jeder invarianten Form erster Art ist durch 8 theilbar.*

Wir erkennen weiter, dass für invariante Formen erster Art nach dem soeben Gesagten bei Anwendung der Substitutionen B, C, D der Factor ε in diesen Substitutionsformeln einfach weggelassen werden kann, dass also in Folge der früher auseinandergesetzten Eigenschaften der Substitutionen C, ADA, ADB^2A jede invariante Form erster Art in den vier Variabelen z symmetrisch sein muss. Da dasselbe von R_{60} gilt, wie der Anblick der Formeln (8) zeigt, so folgt:

3) *Jede invariante Form ist eine symmetrische Function der vier Variabelen z.*

Endlich wollen wir eine Form erster Art nach geraden und ungeraden Potenzen von z_3^2 und z_4^2 in folgender Weise ordnen:

$$f = f_1(z_1^2, z_2^2, z_3^4, z_4^4) + z_3^2 f_2(z_1^2, z_2^2, z_3^4, z_4^4) + z_4^2 f_3(z_1^2, z_2^2, z_3^4, z_3^4) \\ + z_3^2 z_4^2 f_4(z_1^2, z_2^2, z_3^4, z_4^4).$$

Wenden wir hierauf B an, so bleibt der erste und letzte Term ungeändert, die beiden mittelsten ändern ihr Vorzeichen, dürfen daher, da f invariant bleiben soll, in f nicht vorkommen. Also muss sein:

$$f = f_1(z_1^2, z_2^2, z_3^4\, z_4^4) + z_3^2 z_4^2 f(z_1^2, z_2^2, z_3^4, z_4^4).$$

Wegen der Symmetrie in den z folgt aber:

$$f = f_1(z_1^4, z_2^4, z_3^4, z_4^4) + z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 f_4(z_1^4, z_2^4, z_3^4, z_4^4),$$

wir haben also den Satz:

4) *Jede invariante Form erster Art ist eine ganze Function von den vierten Potenzen der Variabelen und dem Product* $z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2$.

§ 3.

Aufstellung des vollen Formensystems.

Wir werden uns nun invariante Formen unserer Gruppe in der Weise zu verschaffen suchen, dass wir uns zunächst eine Form bilden, welche bei einer möglichst ausgedehnten Untergruppe von G invariant bleibt, bei Anwendung von G also möglichst wenige verschiedene Werthe annimmt, indem wir gleichzeitig die Forderung zu erfüllen bestrebt sein werden, dass diese Form auch von möglichst niedrigem Grade ist. Indem wir alsdann solche symmetrischen Verbindungen der sämmtlichen verschiedenen Werthe dieser Function zusammensetzen, welche nicht identisch verschwinden, werden wir zu Formen gelangen, welche bei der Gesammtgruppe invariant bleiben.

Es ist zunächst leicht, Formen anzugeben, welche der ausgezeichneten Untergruppe H_2 gegenüber sich invariant verhalten. Es sind dies die in den Formeln (7) mit φ, ψ_2, ψ_3, ψ_4, χ bezeichneten Ausdrücke. Sie bilden sogar das volle Formensystem der Gruppe H_2, *indem wir unter einem zu einer Gruppe linearer Substitutionen gehörigen vollen Formensysteme den Inbegriff aller derjenigen invarianten Formen verstehen, welche nothwendig und hinreichend sind, damit durch sie eine jede bei den Substitutionen der Gruppe invariant bleibende Form rational und ganz ausgedrückt werden kann.*

Der etwas umständliche Beweis dafür, dass die genannten Functionen das volle Formensystem der Gruppe H_2 bilden, kann hier übergangen werden, da er für die weiteren Entwickelungen nicht erforderlich ist. Eine Folge dieser Thatsache ist es aber, dass, wie die wirkliche Anwendung der vier erzeugenden Substitutionen zeigt, die fünf Grössen φ, ψ_i, χ bei Anwendung der ganzen Gruppe G sich linear unter sich substituiren, also eine mit G isomorphe quinäre endliche Substitutionsgruppe bilden.

Aus den Grössen φ, ψ_i, χ setzen wir nun eine neue Form Φ zusammen, welche noch bei einer anderen in H_1 enthaltenen Untergruppe ungeändert bleibt. Ausser H_2 ist in H_1 nach § 1 noch die aus S und T erzeugte Gruppe als Untergruppe enthalten. Verlangen wir zunächst, dass Φ bei der Substitution T von der Periode fünf ungeändert bleibt — indem wir T der grösseren Periode wegen vor S bevorzugen.

Die Substitution T wirkt auf die Functionen φ, ψ_i, χ folgendermassen:

$$
(9) \qquad T: \begin{cases}
16\varphi' = 4\varphi + 24\psi_2 - 24\psi_3 - 24\psi_4 - 96\chi, \\
16\psi_2' = 2\varphi - 4\psi_2 + 4\psi_3 - 12\psi_4 + 16\chi, \\
16\psi_3' = 2\varphi + 12\psi_2 + 4\psi_3 + 4\psi_4 + 16\chi, \\
16\psi_4' = 2\varphi - 4\psi_2 - 12\psi_3 + 4\psi_4 + 16\chi, \\
16\chi' = \varphi - 2\psi_2 + 2\psi_3 + 2\psi_4 - 8\chi.
\end{cases}
$$

Um an der Forderung fest zu halten, dass Φ von möglichst niedrigem Grade sein soll, setzen wir Φ als lineare Function von φ, ψ_i, χ an, also:

$$\Phi = a\varphi + b\psi_2 + c\psi_3 + d\psi_4 + e\chi.$$

Verlangen wir vorläufig nur, dass Φ' bei T bis auf einen Factor ϱ invariant bleiben soll, dass also $\Phi' = \varrho\Phi$ sei, so liefert uns die Gleichung:

$$a\varphi' + b\psi_2' + c\psi_3' + d\psi_4' + e\chi' = \varrho(a\varphi + b\psi_2 + c\psi_3 + d\psi_4 + e\chi),$$

indem wir für φ', ψ_i', χ' ihre Werthe aus (9) eintragen, und nun die Coefficienten von φ, ψ_i, χ beiderseits gleichsetzen, fünf lineare homogene Gleichungen für die fünf Grössen a, b, c, d, e. Sollen diese nicht sämmtlich verschwinden, so muss die Eliminationsdeterminante gleich Null sein, und dies liefert uns eine Gleichung fünften Grades für ϱ. *Diese Gleichung reducirt sich auf die einfache Form:* $\varrho^5 = 1$. Wir wählen als Wurzel natürlich $\varrho = 1$, weil bei dieser Wahl Φ absolut invariant bleibt, und erhalten jetzt als zugehörige Werthe der Coefficienten:

$$a = 1,\ b = 6,\ c = 6,\ d = -6,\ e = 0.$$

Mithin haben wir:

$$(10) \qquad \Phi = \varphi + 6(\psi_2 + \psi_3 - \psi_4).$$

Bei Anwendung der ganzen aus S und T zusammenzusetzenden Untergruppe nimmt, wie sich leicht zeigen lässt, Φ nur 6 verschiedene Werthe an, und zwar die folgenden:

$$
(11) \qquad \begin{cases}
\Phi_1 = \varphi + 6(-\psi_2 - \psi_3 - \psi_4), \\
\Phi_2 = \varphi + 6(-\psi_2 + \psi_3 + \psi_4), \\
\Phi_3 = \varphi + 6(+\psi_2 - \psi_3 + \psi_4), \\
\Phi_4 = \varphi + 6(+\psi_2 + \psi_3 - \psi_4), \\
\Phi_5 = -2\varphi - 24\chi, \\
\Phi_6 = -2\varphi + 24\chi.
\end{cases}
$$

Da jedes einzelne der Φ_i bei der H_2 ungeändert bleibt, so haben wir das Resultat: *Die sechs Functionen Φ_i vertauschen sich bei Anwendung der Substitutionen der ausgezeichneten Untergruppe H_1 nur unter einander (ohne zutretenden Factor).*

Um endlich die Wirkung der vollen Gruppe auf diese Functionen zu erkennen, brauchen wir nur das Verhalten der Substitution U (Formel (4)) zu untersuchen. Diese bewirkt ebenfalls nur eine Vertauschung der Φ_i unter sich, aber verbunden mit einem simultanen Zeichenwechsel aller Φ_i. Dasselbe zeigt sich auch, wenn wir die Substitutionen A, B, C, D einzeln auf die Φ_i wirken lassen. *Die Function Φ ist demnach bei der Gesammtgruppe G zwölfwerthig, aber dergestalt, dass sich je zwei Werthe nur durch das Vorzeichen unterscheiden.*

Bilden wir jetzt die elementaren symmetrischen Functionen aus den sechs Grössen Φ_i, so werden uns dieselben, so weit sie nicht identisch verschwinden, entweder absolut invariante Formen für unsere Gruppe darstellen, oder solche, welche nur ihr Vorzeichen wechseln, je nachdem ihre Dimension in den Φ gerade oder ungerade ist.

Wir erhalten so folgendes Formelsystem, wobei bemerkt sein mag, dass die symmetrischen Functionen fünfter und sechster Dimension — welche übrigens *nicht* identisch verschwinden — der Complicirtheit der Ausdrücke wegen nicht explicite in den z hingeschrieben sind, dass dagegen die symmetrische Function vierter Dimension sich bis auf einen Zahlenfactor als das Quadrat der zweiter Dimension erweist. Die Zahlenfactoren auf den linken Seiten sind beigefügt, damit die Coefficienten der Glieder, welche die höchsten Potenzen der einzelnen Variabeln enthalten, $= 1$ werden.

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum \Phi_i = 0,\\
&-\tfrac{1}{6}\sum \Phi_i\Phi_k = \sum z_i^8 + 14\sum z_i^4 z_k^4 + 168 z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 = F_8,\\
&-\tfrac{1}{4}\sum \Phi_i\Phi_k\Phi_l = \sum z_i^{12} - 33\sum z_i^8 z_k^4 + 330\sum z_i^4 z_k^4 z_l^4\\
&\qquad\qquad + 792\, z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 \cdot \sum z_i^4 = F_{12},\\
&\sum \Phi_i\Phi_k\Phi_l\Phi_m = \tfrac{1}{4}\left(\sum \Phi_i\Phi_k\right)^2 = 9F_8^2,\\
&\tfrac{1}{12}\sum \Phi_i\Phi_k\Phi_l\Phi_m\Phi_n = F_{20},\\
&\tfrac{1}{4}\,\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_6 = F_{24}.
\end{aligned}\right.$$

Links gehen die Indices von 1—6, rechts von 1—4.

Hiernach sind F_8 und F_{24} absolut invariant. F_{12} und F_{20} sind absolut invariant bei der H_1, und erhalten bei den übrigen Substitutionen von G den Factor -1, folglich sind *F_{12}^2, F_{20}^2 und $F_{12}\,.\,F_{20}$ ebenfalls absolut invariant.*

Ich behaupte nun:

In F_8, F_{12}^2, F_{20}^2, F_{24}, $F_{12}\,.\,F_{20}$ und R_{60} haben wir das volle

Formensystem unserer Gruppe vor uns, d. h. jede andere bei den Substitutionen der Gruppe invariant bleibende Form ist eine rationale, ganze Function der Formen des Systems.

Ehe wir zum Beweise dieser Behauptung schreiten, wird es nöthig sein, die Entwickelungen des folgenden Paragraphen vorauszuschicken.

§ 4.

Die Lösung des Formenproblems.

Ertheilen wir den vier invarianten Formen F_8, F_{12}^2, F_{20}^2, F_{24} beliebige aber feste Werthe, setzen wir etwa:

$$(13)\qquad F_8 = a,\ F_{12}^2 = b,\ F_{20}^2 = c,\ F_{24} = d,$$

so will ich zunächst zeigen, dass diese Grössen in der That ganz beliebig gewählt werden können, dass also zwischen den Formen F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24} keinerlei Abhängigkeit besteht. Bilden wir zu dem Zwecke die Functionaldeterminante $(F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24})$. Ohne allzugrossen Aufwand von Rechnung findet man, dass das Glied, welches in z_1 von höchstem Grade ist, folgendermassen lautet:

$$2^{11} . 3^{13} . z_1^{45} z_2 z_3 z_4 (z_2^4 - z_3^4)(z_3^4 - z_4^4)(z_4^4 - z_2^4).$$

Damit ist das Nichtverschwinden der Functionaldeterminante und somit der Satz bewiesen: *Die Formen F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24} sind von einander unabhängig.*

Die Ausdrücke (13) stellen uns nun vier Gleichungen mit den vier Unbekannten z_1, z_2, z_3, z_4 vor. Eine vorläufige Abzählung ergiebt, dass dieselben $8 . 24 . 40 . 24 = 4 . 64 . 720 = 4N$ Lösungen besitzen. *Wir sind aber in der Lage, diese Lösungen wirklich angeben zu können.* Dies geschieht auf folgende Weise:

Wie aus den Formeln (12) hervorgeht, können wir die sechs elementaren symmetrischen Functionen der Grössen $\Phi_1, \ldots, \Phi_6$ unmittelbar durch a, b, c, d ausdrücken. Sind daher $y_1, y_2, \ldots, y_6$ die sechs Wurzeln der Gleichung:

$$(14)\qquad y^6 - 6ay^4 + 4\sqrt{b}\cdot y^3 + 9a^2y^2 - 12\sqrt{c}\cdot y + 4d = 0,$$

so werden die Gleichungen (13) durch jedes Werthsystem $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_6$ befriedigt, welches wir *in beliebiger Reihenfolge* mit den Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_6$ identificiren. Die Gleichung (14) repräsentirt aber in der That nicht eine, sondern vier Gleichungen, welche sich nur durch die Vorzeichen von $\sqrt{b}$ und $\sqrt{c}$ von einander unterscheiden, was gerade vier Möglichkeiten ausmacht. *Wir erhalten demnach* $4 . 6!$ *Lösungssysteme $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_6$, welche den Gleichungen* (13) *genügen.*

Nun kommt es darauf an, aus den Φ_i die z_i zu berechnen. Die Grössen φ, ψ_2, ψ_3, ψ_4, χ lassen sich vermittelst der Gleichungen (11) linear durch die Φ_i ausdrücken. Aus den Gleichungen (7) aber ergiebt sich ohne Weiteres:

$$(15)\quad \begin{cases} (z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2)^2 = \varphi + 2(\psi_2+\psi_3+\psi_4) \\ \qquad\qquad = -\frac{1}{3}(\Phi_1+\Phi_5+\Phi_6) = P_1, \\ (z_1^2+z_2^2-z_3^2-z_4^2)^2 = \varphi + 2(\psi_2-\psi_3-\psi_4) \\ \qquad\qquad = -\frac{1}{3}(\Phi_2+\Phi_5+\Phi_6) = P_2, \\ (z_1^2-z_2^2+z_3^2-z_4^2)^2 = \varphi + 2(-\psi_2+\psi_3-\psi_4) \\ \qquad\qquad = -\frac{1}{3}(\Phi_3+\Phi_5+\Phi_6) = P_3, \\ (z_1^2-z_2^2-z_3^2+z_4^2)^2 = \varphi + 2(-\psi_2-\psi_3+\psi_4) \\ \qquad\qquad = -\frac{1}{3}(\Phi_4+\Phi_5+\Phi_6) = P_4, \end{cases}$$

wo die P_i zur Abkürzung für die links danebenstehenden Grössen eingeführt sind. Hieraus hat man:

$$(16)\quad \begin{cases} z_1^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}+\sqrt{P_4}), \\ z_2^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}-\sqrt{P_3}-\sqrt{P_4}), \\ z_3^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{P_1}-\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}-\sqrt{P_4}), \\ z_4^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{P_1}-\sqrt{P_2}-\sqrt{P_3}+\sqrt{P_4}). \end{cases}$$

Aus einem Werthsysteme der Φ_i würden sich hiernach 2^4 Werthsysteme der z_i^2 ergeben, da die Vorzeichen der vier Wurzelgrössen beliebig sind Berechnet man aber aus diesen Formeln:

$$(17)\quad \begin{cases} z_1^2z_2^2z_3^2z_4^2 = 4^{-4}\left(\sum P_i^2 - 2\sum P_iP_k + 8\sqrt{P_1}.\sqrt{P_2}.\sqrt{P_3}.\sqrt{P_4}\right), \\ \text{so hat man andrerseits aus (7) und (11):} \\ \qquad z_1^2z_2^2z_3^2z_4^2 = \chi^2 = 48^{-2}.(\Phi_5-\Phi_6)^2. \end{cases}$$

Durch Vergleichung dieser beiden Ausdrücke sieht man, dass z. B. $\sqrt{P_4}$ bestimmt ist, wenn die Vorzeichen der drei anderen Wurzeln irgendwie angenommen werden. *Mithin ergeben sich nur* 2^3 *Werthsysteme* z_i^2 *aus einem Werthsystem* Φ_i. Ebenso folgt, dass zu einem Werthsystem z_i^2 nicht 2^4 Werthsysteme z_i gehören — der beliebigen Wahl der Vorzeichen der Quadratwurzeln aus den rechten Seiten der Gleichungen (16) entsprechend — sondern nur 2^3, da die Wahl der letzten Quadratwurzel durch die Gleichung:

$$z_1z_2z_3z_4 = 48^{-1}.(\Phi_6-\Phi_5)$$

an die der drei übrigen gebunden ist. *Wir erhalten somit, da es* $4 \,.\, 720$ *Werthsysteme* Φ_i *giebt, welche den vier Gleichungen* (13) *genügen, in den Quadratwurzeln aus den rechten Seiten der Gleichungen* (16) *in der That* $2^3 \,.\, 2^3 \,.\, 4 \,.\, 720 = 4 \,.\, 64 \,.\, 720 = 4N$ *d. h. alle Lösungssysteme* z_1, z_2, z_3, z_4, *welche die Gleichungen* (13) *befriedigen.*

Wir setzen jetzt auch noch den Werth der invarianten Form $F_{12} \,.\, F_{20}$ als vorgeschrieben voraus, was wir durch die Gleichung andeuten wollen:

$$F_{12} \,.\, F_{20} = +\sqrt{bc}. \tag{18}$$

Von den vier in (14) enthaltenen Gleichungen sind jetzt nur noch die zwei beizubehalten, in denen $\sqrt{b}$ und $\sqrt{c}$ gleiches Vorzeichen besitzen, *mithin reducirt sich die Anzahl der Lösungen der Gleichungen* (13) *und* (18) *auf* $2N$.

Ferner bilden wir für jede der beiden Gleichungen (14) die Discriminante. *Diese ist für beide Gleichungen eine und dieselbe.* Denn jede der beiden Gleichungen (14) geht aus der anderen hervor, wenn man $-y$ statt y setzt. Für diesen Wechsel bleibt aber die Discriminante als Quadrat des Products der Wurzeldifferenzen ungeändert.*) Die Discriminante ist aber nach den vorangegangenen Entwickelungen nichts anderes als

$$\prod_{i,k=1}^{6} (\Phi_i - \Phi_k)^2.$$

Sie stellt sich als ganze Function von $a, b, c, d, \sqrt{bc}$, d. h. von $F_8, F_{12}^2, F_{20}^2, F_{24}, F_{12} \,.\, F_{20}$ dar, ist mithin eine invariante Form unserer Gruppe. Wie aus dem Term $(\Phi_5 - \Phi_6)^2$ hervorgeht, enthält sie aber den Term $z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2$ als Factor, *mithin ist die Discriminante der Gleichung* (14) *nichts anderes als* R_{60}^2 (von einem etwaigen Zahlenfactor abgesehen), da das 15-gliedrige Product $\Pi(\Phi_i - \Phi_k)$ von der 60^{ten} Dimension ist. Wir haben also den wichtigen Satz bewiesen:

R_{60}^2 *ist eine ganze Function der invarianten Formen* $F_8, F_{12}^2, F_{20}^2, F_{24}, F_{12} \cdot F_{20}$, *und ist als solche dargestellt durch die Discriminante der Gleichung* (14), *wenn wir in derselben* $a, b, c, d, \sqrt{bc}$ *den Gleichungen* (13) *und* (18) *gemäss durch* $F_8, F_{12}^2, F_{20}^2, F_{24}, F_{12} \,.\, F_{20}$ *ersetzen.*

Ist nun endlich der Werth der invarianten Form R_{60} selbst vorgeschrieben, was wir durch die Gleichung:

$$R = +\sqrt{\Delta} \tag{19}$$

andeuten wollen, so werden von den $2N$ Werthsystemen z_i, welche

*) Den in den Coeff. ausgerechneten Werth der Discriminante der allgemeinen Form 6. Ordnung siehe bei Salmon, Algebra der linearen Transformationen. Leipzig 1877. pag. 344.

die Gleichungen (13) und (18) befriedigen, nur noch die Hälfte, also N, der Gleichung (19) genügen. Wir fassen dies in den Satz zusammen:

Die Anzahl der Werthsysteme z_i, welche den Gleichungen: $F_8 = a$, $F_{12}^2 = b$, $F_{20}^2 = c$, $F_{24} = d$, $F_{12} . F_{20} = +\sqrt{bc}$, $R_{60} = +\sqrt{\Delta}$ genügen, ist $= N$, also gleich der Anzahl der linearen Substitutionen, welche jede der sechs invarianten Formen $F_8 \dots R_{60}$ in sich selbst überführen.

Kennt man daher *ein* Lösungssystem z_1, z_2, z_3, z_4 dieser Gleichungen, so erhält man *alle übrigen* durch die N Substitutionen der Gruppe G.

§ 5.

Beweis der Vollständigkeit des Formensystems.

Aus dem soeben gewonnenen Satze können wir nun folgendermassen schliessen: Setzen wir in eine beliebige Form $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$ die N Lösungssysteme unserer sechs Gleichungen:

$$F_8 = a, \dots, R_{60} = +\sqrt{\Delta}$$

ein, so erhält f im Allgemeinen N von einander verschiedene Werthe, ist also durch eine Gleichung vom Grade N in f mit $F_8, \dots R_{60}$ verknüpft. Ist aber f eine bei den N Substitutionen der Gruppe G *invariante* Form, so werden alle die N Werthsysteme der z_i, da sie sämmtlich aus einem derselben durch die N Substitutionen von G hervorgehen, der Form f auch nur einen einzigen Werth ertheilen; f ist mithin durch eine Gleichung ersten Grades mit den Formen $F_8, \dots, R_{60}$ verknüpft, d. h. f ist eine *rationale Function* der bezeichneten Formen.

Ich will nun nach dieser orientirenden Vorüberlegung direct beweisen, dass jede invariante Form f nicht nur eine *rationale*, sondern auch eine *ganze* Function der sechs invarianten Formen unseres Formensystems ist.

Ich beweise zu dem Ende zuerst, dass jede invariante Form sich als ganze Function der sechs Grössen $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_6$ darstellen lässt. Von R_{60} wissen wir das bereits. Wir hatten gefunden:

$$R_{60} = \text{Const.} \prod_{i,k=1}^{6} (\Phi_i - \Phi_k).$$

Nach Satz 1, 3 und 4 des § 2 wird der Beweis vollständig erbracht sein, wenn es uns zu beweisen gelingt, dass jede ganze symmetrische Function der z, welche nur von den vierten Potenzen der Variabelen und von dem Producte $z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2$ abhängt, sich als ganze Function der Φ_i darstellt.

Nun ist jede Form der erwähnten Eigenschaft darstellbar als ganze Function des Productes $z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2$ und der elementaren symmetrischen Functionen von z_1^4, z_2^4, z_3^4, z_4^4. Es ist aber unmittelbar:

$$z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 = 48^{-2} . (\Phi_5 - \Phi_6)^2 \text{ nach (17)},$$

ferner

$$z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4 = \varphi = -\tfrac{1}{4}(\Phi_5 + \Phi_6) \text{ nach (7) und (11)},$$

und

$$z_1^4 z_2^4 z_3^4 z_4^4 = 48^{-4} \cdot (\Phi_5 - \Phi_6)^4.$$

$\sum z_i^8$ und $\sum z_i^{12}$, die wir ja an Stelle der entsprechenden elementaren symmetrischen Functionen wählen dürfen, ergeben sich aber, wenn man die Formeln (16) des vorigen Paragraphen benutzt, durch unmittelbare Ausrechnung als ganze Functionen von P_1, P_2, P_3, P_4 und $\sqrt{P_1 P_2 P_3 P_4}$, wo die P_i durch (15) definirt sind. Diese Quadratwurzel ist aber, wie durch Gleichsetzung der rechten Seiten der beiden Formeln (17) hervorgeht, ebenfalls als rationale, ganze Function der Φ_i darstellbar. Alle symmetrischen Functionen von z_1^4, z_2^4, z_3^4, z_4^4 und das Product $z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2$ sind demnach in der That ganze Functionen der Φ_i. Also können wir zusammenfassend sagen: *Jede invariante Form unserer Gruppe ist als ganze Function der sechs Formen $\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_6$ darstellbar.*

Aber nicht jede ganze Function der Φ wird eine invariante Form ergeben, sondern nur diejenigen, welche die mit G isomorphe Gruppe der Φ zulassen. Diese Gruppe ist folgende:

Den vier Erzeugenden A, B, C, D entsprechen in wohl nicht misszuverstehender Bezeichnung folgende Vertauschungen der Φ:

$$\begin{aligned} A &: (\Phi_1 \Phi_4)(\Phi_2 \Phi_6)(\Phi_3 \Phi_5), \\ B &: (\Phi_3 \Phi_4)(\Phi_1 \Phi_2)(\Phi_5 \Phi_6), \\ C &: (\Phi_2 \Phi_4), \\ D &: (\Phi_5 \Phi_6), \end{aligned}$$

gleichzeitig jedoch verbunden mit einem Vorzeichenwechsel aller Φ. Sehen wir für einen Augenblick von diesem Zeichenwechsel ab, so behaupte ich: Jene durch A, B, C, D gegebenen Vertauschungen der Φ erzeugen in Combination und Wiederholung sämmtliche 720 Permutationen der symmetrischen Vertauschungsgruppe der 6 Elemente Φ. In der That ist:

$$ACA = (\Phi_1 \Phi_6); \quad BCB = (\Phi_1 \Phi_3); \quad ADA = (\Phi_2 \Phi_3).$$

Hieraus bekommt man aber durch einfache Transformirungen:

$$(\Phi_1 \Phi_2), (\Phi_1 \Phi_3), (\Phi_1 \Phi_4), (\Phi_1 \Phi_5), (\Phi_1 \Phi_6)$$

woraus sich die ganze symmetrische Gruppe zusammensetzen lässt.*)

*) Netto, Substitutionentheorie. Leipzig 1882, pag. 33, Lehrsatz VI.

Die ausgezeichnete Untergruppe H_1, welche aus denjenigen Substitutionen besteht, an denen nur eine gerade Anzahl der 4 Erzeugenden betheiligt ist, wird daher in den Φ die sogenannte alternirende Gruppe von 360 aus einer geraden Anzahl von Vertauschungen bestehenden Permutationen bewirken, da sich die Vorzeichenwechsel bei diesen Substitutionen gerade aufheben.

Nennen wir das Quadrat des Differenzenproductes von n Grössen Δ, so ist bekanntlich jede bei der alternirenden Vertauschungsgruppe dieser n Elemente invariant bleibende rationale Function der n Elemente rational ausdrückbar durch $\sqrt{\Delta}$ und die symmetrischen Functionen der n Elemente. *Es ist aber auch jede ganze, bei der genannten Gruppe invariant bleibende Function f als ganze Function von $\sqrt{\Delta}$ und den symmetrischen Functionen darstellbar.* Denn jede alternirende ganze Function f lässt sich zunächst durch Herausschaffen der Quadratwurzel aus dem Nenner auf die Form bringen:

$$f = \frac{S_1 + \sqrt{\Delta} \cdot S_2}{S_3},$$

wo S_1, S_2, S_3 symmetrische Functionen bedeuten. Vertauscht man in dieser Gleichung irgend zwei Elemente, so erhält man:

$$f_1 = \frac{S_1 - \sqrt{\Delta}\, S_2}{S_3}.$$

Jetzt ist $f + f_1 = 2\frac{S_1}{S_3}$ eine ganze symmetrische Function, also S_1 durch S_3 theilbar, und $f - f_1 = 2\sqrt{\Delta}\frac{S_2}{S_3}$ eine ganze alternirende Function, also $\frac{f-f_1}{\sqrt{\Delta}}$ eine ganze symmetrische Function, mithin auch S_2 durch S_3 theilbar.

Im vorliegenden Falle der sechs Elemente Φ_i ist aber $\sqrt{\Delta} = R_{60}$, *folglich ist jede bei der ausgezeichneten Untergruppe H_1 invariant bleibende ganze Function der Φ, also auch nach den früheren Erörterungen jede invariante Form der z rational und ganz ausdrückbar durch R_{60} und die elementaren symmetrischen Functionen der Φ, d. h. durch F_6, F_{12}, F_{20}, F_{24}.*

Nun ist der letzte Schritt zur Gesammtgruppe leicht. Da bei der Gruppe G die Φ sich auf alle mögliche Weisen permutiren, jedoch verbunden mit einem simultanen Zeichenwechsel, so können bei der Darstellung einer bei G invarianten Form durch die Φ nur solche Terme auftreten, in denen die beiden ungeraden symmetrischen Functionen der Φ ($\Sigma\Phi_i$ ist Null) entweder in einer geraden Potenz oder mit einander verbunden vorkommen und somit folgt: *Jede homogene, ganze Function der vier Grössen z_1, z_2, z_3, z_4, welche durch die*

N Substitutionen der Gruppe G in sich übergeführt wird, ist eine ganze Function von F_8, F_{12}^2, $F_{12}\,.\,F_{20}$, F_{20}^2, F_{24}, R_{60}.

Hiermit ist der Beweis der Vollständigkeit unseres Formensystems erbracht.

§ 6.

Anwendung des Vorigen.

Jede Covariante solcher Formen, die lineare Transformationen in sich zulassen, lässt offenbar dieselben Transformationen in sich zu. Also sind alle Covarianten, die wir aus den Formen unseres Systems bilden können, ebenfalls invariante Formen, müssen sich also rational und ganz durch die Formen des Systems ausdrücken.

Hiervon machen wir eine Anwendung zunächst auf die Functionaldeterminante $(F_8, F_{12}^2, F_{20}^2, F_{24})$. Dieselbe ist gleich:

$$4F_{12}\,.\,F_{20}(F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24}).$$

Da aber $F_{12}\,.\,F_{20}$ selbst eine invariante Form ist, so muss auch die Functionaldèterminante $(F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24})$, von der in § 4 bereits erwiesen, dass sie nicht identisch verschwindet, eine invariante Form sein. Dieselbe ist vom 60ten Grade, und da es nur eine invariante Form 60ten Grades giebt, *so folgt, dass die Functionaldeterminante* $(F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24})$ *bis auf einen Zahlenfactor mit* R_{60} *übereinstimmt.* Die Vergleichung der höchsten Potenzen ergiebt:

$$(F_8, F_{12}, F_{20}, F_{24}) = 2^{11}\,.\,3^{13} R_{60}. \tag{20}$$

Wir bilden ferner die Hessesche Form von F_8; dieselbe ist eine invariante Form vom 24ten Grade, die wir so bezeichnen wollen:

$$H_{24} = \frac{1}{7^4\,.\,8^4}\left|\frac{\partial^2 F_8}{\partial z_i \partial z_k}\right|.$$

Alsdann ergiebt die Rechnung:

$$144 H_{24} = F_{12}^2 - F_{24}. \tag{21}$$

Endlich bietet uns noch die Liniengeometrie eine invariante Form dar, die, an und für sich interessant, in den Entwickelungen des § 7 eine wichtige Rolle spielen wird, und die wir deshalb durch die Formen unseres Systems ausdrücken wollen.

Ordnet man nämlich die sechs Fundamentalcomplexe $x_i = 0$ zu Tripeln, so definirt ein jedes dieser Tripel z. B. (123) mit dem Ergänzungstripel (456) eine Linienfläche zweiter Ordnung. Da sich eine solche Zusammenfassung zu Doppeltripeln auf $\frac{1}{2}\cdot\frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3} = 10$ verschiedene Arten bewerkstelligen lässt, erhalten wir zehn Flächen zweiter Ordnung, deren Inbegriff ebenfalls bei den Vertauschungen und Vorzeichenwechseln der x_i ungeändert bleiben muss. Diese Flächen sind folgende:

$$(22)\qquad \begin{cases} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0, \\ z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = 0, \\ z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 = 0, \\ z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 = 0, \\ \qquad 2(z_1 z_2 \pm z_3 z_4) = 0, \\ \qquad 2(z_1 z_3 \pm z_2 z_4) = 0, \\ \qquad 2(z_1 z_4 \pm z_2 z_3) = 0. \end{cases}$$

Das Product der linken Seiten dieser Gleichungen liefert eine Form 20ten Grades D_{20}, welche bei den vier Erzeugenden A, B, C, D ihr Zeichen wechselt, bei H_1 invariant bleibt. Folglich muss sich D_{20} durch die Formen des vollen Systems der H_1 rational und ganz ausdrücken. Man findet:

$$(23)\qquad 81 D_{20} = 2^5 \,.\, (F_8 \,.\, F_{12} - F_{20}).$$

§ 7.

Zusammenhang mit den Borchardt'schen Moduln.

Wie schon in der Einleitung bemerkt, hat Herr Klein vermittelst des durch die Kummersche Fläche begründeten Zusammenhanges der Liniengeometrie mit den hyperelliptischen Functionen vom Geschlechte $p = 2$ gezeigt, dass sich die Verhältnisse der sogenannten Borchardt'schen Moduln bei linearer Transformation der Perioden genau so linear substituiren, wie die Verhältnisse $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ bei Anwendung der soeben untersuchten Gruppe G. Unter Borchardt'schen Moduln verstehen wir dabei die Nullwerthe von vier irgend ein Göpel'sches Quadrupel bildenden ϑ-Functionen mit den Moduln $2\tau_{11}$, $2\tau_{12}$, $2\tau_{22}$. Nun lässt sich die ganze unendliche Gruppe aller linearen Periodentransformationen durch folgende vier nur unbedeutend von den Krazer'schen Substitutionen*) abweichenden Transformationen erzeugen:

	A	B	C	D	
$\omega_{i1}' =$	$-\omega_{i3}$	ω_{i1}	ω_{i2}	ω_{i1}	
$\omega_{i2}' =$	ω_{i2}	ω_{i2}	ω_{i1}	ω_{i2}	$i = 1, 2.$
$\omega_{i3}' =$	ω_{i1}	$\omega_{i3} - \omega_{i1}$	ω_{i4}	$\omega_{i2} + \omega_{i3}$	
$\omega_{i4}' =$	ω_{i4}	ω_{i4}	ω_{i3}	$\omega_{i1} + \omega_{i4}$	

*) Krazer. „Ueber die Zusammensetzung ganzzahliger linearer Substitutionen etc." Annali di Matematica, ser. 2, XII.

Stellen wir die Wirkung dieser Transformationen auf die vier Grössen $\theta_5, \theta_4, \theta_{23}, \theta_{01}$ fest, indem wir zur Abkürzung

$$\vartheta(0, 0 \mid 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22}) = \theta$$

setzen, und schreiben die resultirenden Substitutionen homogen in den durch die Gleichung:

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \theta_5 : \theta_4 : \theta_{23} : \theta_{01}$$

definirten z, wobei wir durch simultane Zufügung geeigneter Factoren bewirken, dass die Substitutionsdeterminante überall $+1$ wird, so erhalten wir die in § 1 mit A, B, C, D bezeichneten 4 erzeugenden Substitutionen unserer Gruppe.

Alle durch die vorhergehende Untersuchung gewonnenen invarianten Formen der z werden daher, wenn wir unter den vier Grössen z Borchardt'sche Moduln verstehen, allen linearen Periodentransformationen gegenüber sich bis auf einen Factor invariant verhalten.

Nun hat Herr Bolza in seiner Arbeit über Darstellung von Invarianten durch ϑ-Functionen*) gezeigt, wie man die rationalen Invarianten der Form 6^{ter} Ordnung durch Nullwerthe von ϑ-Functionen mit den Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ ausdrücken kann. Da in diesen Ausdrücken**) nur die Quadrate der 10 geraden ϑ-Functionen vorkommen, diese sich aber durch quadratische Verbindungen der θ ausdrücken, so werden sich die Invarianten der Form 6^{ter} Ordnung durch die invarianten Formen unseres Systems ausdrücken lassen müssen.

Unter Zugrundelegung der Uebertragungsformeln:

$$\begin{aligned}
\vartheta_5^2 &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2, & \vartheta_{12}^2 &= z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2,\\
\vartheta_0^2 &= z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2, & \vartheta_{34}^2 &= z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2,\\
\vartheta_{23}^2 &= 2(z_1 z_2 + z_3 z_4), & \vartheta_{14}^2 &= 2(z_1 z_2 - z_3 z_4),\\
\vartheta_{01}^2 &= 2(z_1 z_3 + z_2 z_4), & \vartheta_2^2 &= 2(z_1 z_3 - z_2 z_4),\\
\vartheta_4^2 &= 2(z_1 z_4 + z_2 z_3), & \vartheta_{03}^2 &= 2(z_1 z_4 - z_2 z_3),
\end{aligned}$$

— es sind dies gerade die linken Seiten der Flächen zweiter Ordnung (22) — erhalten wir folgende Resultate:

$$\begin{aligned}
\sum \vartheta_\alpha^8 &= 4F_8,\\
\prod_\alpha \vartheta_\alpha &= D_{20}, \quad \text{(vgl. Formel (23))}\\
\prod_i R_i &= 2^{60} R_{60}.
\end{aligned}$$

---

*) Die hier vorstehend abgedruckte Arbeit. D. Red.

**) Vergl. durchweg § 7 der genannten Abhandlung.

Es handelt sich noch um $\sum \vartheta_\alpha{}^4 \vartheta_\beta{}^4 \vartheta_\gamma{}^4 \vartheta_\delta{}^4 \vartheta_\varepsilon{}^4 \vartheta_\zeta{}^4$, wobei die Summation zu erstrecken ist über die 15 Sextupel, welche die 15 Göpel'schen Quadrupel aus den 10 geraden ϑ-Functionen zum Product aller geraden ϑ-Functionen ergänzen. Wir berechnen diesen Ausdruck, den wir mit G_{24} bezeichnen wollen, indem wir aus dem einen Term:

$$\vartheta_{23}^4 \vartheta_{14}^4 \vartheta_{01}^4 \vartheta_2{}^4 \vartheta_4{}^4 \vartheta_{03}^4 = 64\,(z_1{}^2 z_2{}^2 - z_3{}^2 z_4{}^2)^2 (z_1{}^2 z_3{}^2 - z_2{}^2 z_4{}^2)^2 (z_1{}^2 z_4{}^2 - z_2{}^2 z_3{}^2)^2$$

die 14 andern durch die Substitutionen unserer Gruppe herleiten. Die Durchführung der Rechnung ergiebt das einfache Resultat:

$$27\,G_{24} = 2^9 \,.\, H_{24}\,.$$

Göttingen, den 30. Juni 1887.